3/12/15

$\{y_1, \dots, y_n\}$ ΒΣΛ της (E_0)

$y_1 v_1' + \dots + y_n v_n' = 0$

$\vdots$ $\quad\leadsto\quad v_1, \dots, v_n$

$y_1^{(n-1)} v_1' + \dots + y_n^{(n-1)} v_n' = \frac{b}{a_n}$ $\qquad y = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_k(s)}{W(s)} \frac{b(s)}{a_n(s)} ds, \; x \in I.$$

<u>Παράδειγμα 4</u> σελίδα 94

$x^2 y'' - x y' + y = x \log x$

$y_\mu(1) = 0 = y'_\mu(1)$

ΒΣΛ ομογενούς $\{x, x\log x\}$

$$\begin{cases} x_1 v_1' + x \log x \, v_2' = 0 \\ v_1' + (\log x + 1) v_2' = \frac{\cancel{x}\log x}{x^{\cancel{2}}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1' + \log x \, v_2' = 0 \\ v_1' + (\log x + 1) v_2' = \frac{\log x}{x} \end{cases}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη έχω $v_2' = \frac{\log x}{x}$

$V_2(x) = \int_1^x \frac{\log s}{s} ds \leadsto V_2(x) = \int_1^x \log s (\log s)' ds = \left[\frac{\log^2 x}{2} \right]_1^x = \frac{\log^2 x}{2}$

$\leadsto v_1' = -\log x \, v_2' = \dots$

Βρίσκω v_1, v_2 και βρίσκω μερική λύση:

$y_\mu(x) = \frac{\log^2 x}{2} x + v_2(x) x \log x$

Για όλες τις λύσεις εωισυνάπτουμε τους γραμμικούς συνδυασμούς του ΒΣΛ.

Scanned by CamScanner

Άσκηση 5 σελίδα 95

$y''' - 3y'' + 2y' = e^x$

$y_1(x) = 1,\ y_2(x) = e^x,\ y_3(x) = e^{2x}$. λύσεις της ομογενούς.

Δεν μας λέει η άσκηση ότι είναι ΒΣΛ, πρέπει να το πιστοποιήσουμε μόνοι μας!

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & 2e^{2x} \\ e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} \neq 0.$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 1 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x}$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{2x} \\ 0 & 0 & 2e^{2x} \\ 0 & 1 & 4e^{2x} \end{vmatrix} = -2e^{2x}$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 1 \end{vmatrix} = e^x$$

$$y_\mu(x) = 1\int_0^x \frac{e^{3s}}{2e^{3s}} e^s\,ds + e^x \int_0^x \frac{-2e^{2s}}{2e^{3s}} e^s\,ds + e^{2x}\int_0^x \frac{e^s}{2e^{3s}e^s} e^s\,ds,\ x \in \mathbb{R}$$

Γενική λύση: $y(x) = y_\mu(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)$.

Θεώρημα 19

(E_0) $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0,\ a_i \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0$.

Αν είναι $\lambda_1, \dots \lambda_s$ διακεκριμένες ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(x) = a_n\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0$, με πολ/τες $m_1, \dots, m_s$ αντίστοιχα $(m_1 + \dots + m_s = n)$. Τότε ένα ΒΣΛ της (E_0) αποτελείται από τις συναρτήσεις $Y_{kj}(x) = x^j e^{\lambda_k x}$

$j = 0, \dots, \lambda_{k-1}$

$k = 1, \dots, s$.

Scanned by CamScanner

Παράδειγμα 2 σελίδα 107

(i) $y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$

$\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6$

$\to -1 \rightsquigarrow y_1(x) = e^{-x}$

$\to 2 \rightsquigarrow y_2(x) = e^{2x}$

$\to 3 \rightsquigarrow y_3(x) = e^{3x}$

} ΒΣΛ από το θεώρημα

*(Εάν έχω ρητή ρίζα θα πρέπει ο αριθμητής να διαιρεί τον σταθερό όρο και ο παρ/στής το μεγιστοβάθμιο).

(ii) $y''' - y'' - y' + y = 0$

$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

$\lambda^2(\lambda-1) - (\lambda-1) = 0 \rightsquigarrow (\lambda-1)(\lambda^2-1) = 0 \rightsquigarrow (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$ $\to e^{x}, \; xe^{x}, \; e^{-x}$

(iii) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$

$1 \quad \pm i$

(Όταν το άθροισμα των συντ/στών είναι 0 τότε ρίζα το 1)

$e^{x}, \quad e^{(1+i)x} = e^{x} \cdot e^{ix} = e^{x}[\cos x + i\sin x]$

Επομένως $e^{x}\cos x, \; e^{x}\sin x$

(iv) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

$\pm i$ με πολλαπλ. 2.

$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$

$(\lambda^2+1)^2 = 0$

$\pm i^2$

$\begin{Bmatrix} \cos x & \sin x \\ x\cos x & x\sin x \end{Bmatrix}$

• $y'' + y = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\pm i$

ΒΣΛ $\{\cos x, \sin x\}$

B6 $y'' + y = b(x)$

$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \qquad W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = -\sin x$

Scanned by CamScanner

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 1 \end{vmatrix} = \cos x$$

$$y_\mu(x) = \cos x \int_0^x \frac{-\sin s}{1} b(s)\,ds + \sin x \int_0^x \frac{\cos x}{1} b(s)\,ds =$$

$$= \int_0^x -\sin s \cos x\, b(s)\,ds + \int_0^x \sin x \cos s\, b(s)\,ds = \int_0^x \underbrace{[\sin x \cos s - \cos x \sin s]}_{\sin(x-s)\, b(s)\, ds} ds$$

$$|y(x)| \le |c_1||\cos x| + |c_2||\sin x| + \int_0^x |\sin(x-s)||b(s)|\,ds$$

$$|y(x)| \le |c_1| + |c_2| + \int_0^x |b(s)|\,ds.$$

φραγμένες λύσεις.

Scanned by CamScanner